Effet d'une perturbation non lineaire sur l'obtention d'une Estimation Uniforme.

Samy Skander Bahoura

EFFET D'UNE PERTURBATION NON LINÉAIRE SUR L'OBTENTION D'UNE ESTIMATION UNIFORME.

SAMY SKANDER BAHOURA

ABSTRACT. We consider the equation $\Delta u = Vu^{(n+2)/(n-2)} + Wu^{n/(n-2)}$ and we give some minimal conditions on ∇V and ∇W to have an uniform estimate for their solutions.

If we replace $Wu^{n/(n-2)}$ by Wu in the previous equation, we have an uniform estimate for radial solutions.

1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS.

Nous notons $\Delta = -\sum \partial_{ii}$ le laplcien géométrique sur $\mathbb{R}^n, n \geq 3$.

Considérons sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, l'équation suivante:

$$\Delta u = Vu^{(n+2)/(n-2)} + Wu^{n/(n-2)} \qquad (E)$$

où V et W sont deux fonctions régulières.

On suppose que:

$$0 < a \leq V(x) \leq b, \ ||\nabla V||_{L^\infty} \leq A \qquad (C_1)$$

$$0 < c \leq W(x) \leq d, \ ||\nabla V||_{L^\infty} \leq B \qquad (C_2)$$

Problème: Quelle conditions minimales peut on imposer à ∇V et ∇W pour avoir une esimation uniforme du type $\sup \times \inf$ pour les solutions de l'équation (E) ?

Notons que lorsque $W \equiv 0$, l'équation (E) est la célèbre équation de la courbure scalaire prescrite sur un ouvert de l'éspace euclidien de dimension $n \geq 3$.

Dans ce cas, il existe beaucoup de résultats concernant les solutions de cette équation, voir par exemple, [B], [C-L 1].

Lorsque $\Omega = \mathbb{S}_n$ avec l'équation correspondante (courbure scalaire), YY. Li donne des conditions de platitude suffisante pour avoir une majoration de l'énergie ainsi que l'existence de points dit isolés simples, voir [L1], [L2].

Dans [C-L 2] Chen et Lin mettent en évidence un contre example confirmant l'importance des hypothèses de Li.

Notons que dans [C-L 1], il existe des résultats concernant les inégalités de Harnack du type $\sup \times \inf$ avec des conditions de platitudes similaires à celles de Li pour une equation du type:

$$\Delta u = Vu^{(n+2)/(n-2)} + g(u)$$

avec g une fonction régulière équivalente t^α, $1 \leq \alpha < \dfrac{n+2}{n-2}$.

Notons que dans ce travail, aucune borne a priori sur l'énergie n'est imposée. On utilise la technique blow-up et de déplacement de plan dite " Moving-Plane" inventée par Alexandrov et développée par Gidas-Ni-Nirenberg, voir [G-N-N].

Notons que la méthode "moving-Plane" est souvent utilisée pour déterminer si les solutions d'une EDP sont symétriques ou dans la recherche de forme explicite de certaines solutions d'équations aux dérivées partielles.

Ici, nous avons:

Théorème 1. *Pour tout $a, b, c, d > 0$, pour toutes suites $(A_i), (B_i)$ telles que $A_i \to 0$ et $B_i \to 0$ et pour tout compact K de Ω, il existe une constante positive $c = c[a, b, c, d, (A_i), (B_i), K, \Omega, n]$ telle que:*

$$\sup_K u_i \times \inf_\Omega u_i \leq c, \quad \text{(pour i assez grand)}$$

pour toute suite $(u_i)_i$ solutions de (E) relativement à (V_i) et (W_i) vérifiant les conditions (C_1) et (C_2).

On se place sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$ ($\Omega = B_1(0)$) et on s'occupe de l'équation suivante:

$$\Delta u_i = V_i {u_i}^{(n+2)/(n-2)} + W_i u_i \qquad (E')$$

On suppose que u_i et V_i sont radiales:

$$0 < a \leq V_i(r) \leq b \ \text{ et } \ |V_i(r) - V_i(r')| \leq A_i |r^2 - r'^2| \ \text{ avec } \ A_i \to 0 \qquad (C_3)$$

$$0 < c \leq W_i(r) \leq d \ \text{ et } \ |W_i'(r)| \leq B_i \ \text{ avec } \ B_i \to 0 \qquad (C_4)$$

Nous avons:

Théorème 2. *Pour tout $a, b, c, d > 0$, pour toutes suites (A_i) et (B_i), il existe une constante positive $c = c[a, b, c, d, (A_i), (B_i), n]$ telle que:*

$$u_i(0) \times u_i(1) \leq c \ \text{ (pour i assez grand)}$$

pour toute suite (u_i) solution de (E') relativement à (V_i) et (W_i) vérifiant (C_3) et (C_4).

2. PREUVES DES THÉORÈMES.

Preuve du Théorème 1

Soit x_0 un point de Ω et $(u_i)_i$ une suite de fonctions sur Ω telles que,

$$\Delta u_i = V_i {u_i}^{(n+2)/(n-2)} + W_i {u_i}^{n/(n-2)}, \ u_i > 0$$

On raisonne par l'absurde, en supposant que $\sup \times \inf$ n'est pas borné.

On suppose que:
$\forall \ c, R > 0 \ \exists \ (u_{c,R,j})_j$ solution de (E) telle que:

$$R^{n-2} \sup_{B(x_0,R)} u_{c,R,j} \times \inf_\Omega u_{c,R,j} \geq c, \qquad (H)$$

Proposition *(blow-up)*:

Il existe une suite de points $(y_i)_i$, $y_i \to x_0$ et deux suites de réels positifs $(l_i)_i, (L_i)_i$, $l_i \to 0$, $L_i \to +\infty$, telles qu'en posant $v_i(z) = \dfrac{[y_i + z/[u_i(y_i)]^{2/(n-2)}]}{u_i(y_i)}$, on ait:

$$0 < v_i(z) \leq \beta_i \leq 2^{(n-2)/2}, \ \beta_i \to 1.$$

$$v_i(z) \to \left(\frac{1}{1 + |z|^2} \right)^{(n-2)/2}, \ \text{laconvergence est uniforme sur tout compact de } \mathbb{R}^n.$$

$$l_i^{(n-2)/2} u_i(y_i) \times \inf_\Omega u_i \to +\infty$$

Preuve de la proposition:

On utilise (H), on peut supposer qu'il existe une suite $R_i > 0, R_i \to 0$ et $c_i \to +\infty$, telles que,

$$R_i{}^{(n-2)}(\sup_{B(x_0,R_i)} u_i)^s \inf_{\Omega} u_i \geq c_i \to +\infty,$$

Soit, $x_i \in B(x_0, R_i)$, tel que $\sup_{B(x_0,R_i)} u_i = u_i(x_i)$ et $s_i(x) = [R_i - |x-x_i|]^{(n-2)/2} u_i(x), x \in B(x_i, R_i)$. Alors, $x_i \to x_0$.

On a,

$$\max_{B(x_i,R_i)} s_i(x) = s_i(y_i) \geq s_i(x_i) = R_i{}^{(n-2)/2} u_i(x_i) \geq \sqrt{c_i} \to +\infty.$$

On pose :

$$l_i = R_i - |x - x_i|, \;\; \bar{u}_i(y) = u_i(y_i + y), \;\; v_i(z) = \frac{u_i\left(y_i + z/[u_i(y_i)]^{2/(n-2)}\right)}{u_i(y_i)}.$$

Il est clair que, $y_i \to x_0$. On obtient aussi:

$$L_i = \frac{l_i}{(c_i)^{1/2(n-2)}}[u_i(y_i)]^{2/(n-2)} = \frac{[s_i(y_i)]^{2/(n-2)}}{c_i^{1/2(n-2)}} \geq \frac{c_i^{1/(n-2)}}{c_i^{1/2(n-2)}} = c_i^{1/2(n-2)} \to +\infty.$$

Si $|z| \leq L_i$, alors $y = [y_i + z/[u_i(y_i)]^{2/(n-2)}] \in B(0, \delta_i l_i)$ avec $\delta_i = \dfrac{1}{(c_i)^{1/2(n-2)}}$ et $|y - y_i| < R_i - |y_i - x_i|$, d'où, $|y - x_i| < R_i$ et donc, $s_i(y) \leq s_i(y_i)$, ce qui revient à écrire,

$$u_i(y)[R_i - |y - y_i|]^{(n-2)/2} \leq u_i(y_i)(l_i)^{(n-2)/2}.$$

Comme, $|y - y_i| \leq \delta_i l_i$, $R_i > l_i$ et $R_i - |y - y_i| \geq R_i - \delta_i l_i > l_i - \delta_i l_i = l_i(1 - \delta_i)$, on obtient,

$$0 < v_i(z) = \frac{u_i(y)}{u_i(y_i)} \leq \left[\frac{l_i}{l_i(1-\delta_i)}\right]^{(n-2)/2} \leq 2^{(n-2)/2}.$$

On pose alors, $\beta_i = \left(\dfrac{1}{1-\delta_i}\right)^{(n-2)/2}$, il est clair que $\beta_i \to 1$.

La fonction v_i vérifie l'équation suivante:

$$\Delta v_i = \tilde{V}_i v_i^{(n+2)/(n-2)} + \frac{\tilde{W}_i}{[u_i(y_i)]^{2/(n-2)}} v_i^{n/(n-2)}$$

avec,

$$\tilde{V}_i(z) = V_i\left[y_i + \frac{z}{[u_i(y_i)]^{2/(n-2)}}\right] \;\text{ et }\; \tilde{W}_i(z) = W_i\left[y_i + \frac{z}{[u_i(y_i)]^{2/(n-2)}}\right].$$

En, utilisant les estimations elliptiques, les théorèmes d'Ascoli et de Ladyzenskaya, $(v_i)_i$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction v solution sur $\mathbb{R}^n$ de,

$$\Delta v = V(0)v^{N-1}, \;\; v(0) = 1, \;\; 0 \leq v \leq 1 \leq 2^{(n-2)/2},$$

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $V(0) = n(n-2)$.

Par le principe du maximum, on a $v > 0$ sur $\mathbb{R}^n$ et un résultat de Caffarelli-Gidas-Spruck (voir [C-G-S]) donne, $v(z) = \left(\dfrac{1}{1+|z|^2}\right)^{(n-2)/2}$. On obtient les mêmes propriétés de convergence des v_i que dans un article précédent (voir [B]). La propostion 2 est prouvée.

<u>Coordonnées Polaires</u> *(Méthode "Moving-Plane")*

Posons pour $t \in]-\infty, \log 2]$ et $\theta \in \mathbb{S}_{n-1}$:

$$w_i(t,\theta) = e^{(n-2)t/2}u_i(y_i + e^t\theta),\ \bar{V}_i(t,\theta) = V_i(y_i + e^t\theta)\ \text{ et }\ \bar{W}_i(t,\theta) = W_i(y_i + e^t\theta).$$

Par ailleurs, soit L l'opérateur $L = \partial_{tt} - \Delta_\sigma - \dfrac{(n-2)^2}{4}$, avec Δ_σ opérateur de Laplace-Baltrami sur $\mathbb{S}_{n-1}$.

La fonction w_i est solution de l'équation suivante :

$$-Lw_i = \bar{V}_i {w_i}^{N-1} + e^t \times \bar{W}_i {w_i}^{n/(n-2)}.$$

On pose pour $\lambda \leq 0$:

$t^\lambda = 2\lambda - t$ $w_i^\lambda(t,\theta) = w_i(t^\lambda,\theta)$, $\bar{V}_i^\lambda(t,\theta) = \bar{V}_i(t^\lambda,\theta)$ et $\bar{W}_i^\lambda(t,\theta) = \bar{W}_i(t^\lambda,\theta)$.

Alors, pour pouvoir vérifier si le Lemme 2 du Théorème 1 dans [B] reste valable, il suffit de noter que la quantité $-L(w_i^\lambda - w_i)$ est négative lorsque $w_i^\lambda - w_i$ l'est. En fait, pour chaque indice i, $\lambda = \xi_i \leq \log \eta_i + 2$, ($\eta_i = [u_i(y_i)]^{(-2)/(n-2)}$).

Tout d'abord:

$$w_i(2\xi_i - t,\theta) = w_i[(\xi_i - t + \xi_i - \log \eta_i - 2) + (\log \eta_i + 2)],$$

par définition de w_i et pour $\xi_i \leq t$:

$$w_i(2\xi_i - t,\theta) = e^{[(n-2)(\xi_i - t + \xi_i - \log \eta_i - 2)]/2} e^{n-2} v_i[\theta e^2 e^{(\xi_i - t)+(\xi_i - \log \eta_i - 2)}] \leq 2^{(n-2)/2} e^{n-2} = \bar{c}.$$

On sait que

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) = [\bar{V}_i^{\xi_i}(w_i^{\xi_i})^{N-1} - \bar{V}_i {w_i}^{N-1}] + [e^{t^{\xi_i}} \bar{W}_i^{\xi_i}(w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)} - e^t \bar{W}_i {w_i}^{n/(n-2)}],$$

Les deux termes du second membre, notés Z_1 et Z_2, peuvent s'écrire:

$$Z_1 = (\bar{V}_i^{\xi_i} - \bar{V}_i)(w_i^{\xi_i})^{N-1} + \bar{V}_i[(w_i^{\xi_i})^{N-1} - {w_i}^{N-1}],$$

et

$$Z_2 = (\bar{W}_i^{\xi_i} - \bar{W}_i)(w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)} e^{t^{\xi_i}} + e^{t^{\xi_i}} \bar{W}_i[(w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)} - {w_i}^{n/(n-2)}] + \bar{W}_i {w_i}^{n/(n-2)}(e^{t^{\xi_i}} - e^t).$$

D'autre part, comme dans la démonstration du Théorème 2 dans [B]:

$$w_i^{\xi_i} \leq w_i\ \text{ et }\ w_i^{\xi_i}(t,\theta) \leq \bar{c}\ \text{ pour tout }\ (t,\theta) \in [\xi_i, \log 2] \times \mathbb{S}_{n-1},$$

où $\bar{c}$ est une constante positive indépendante de i de $w_i^{\xi_i}$ pour $\xi_i \leq \log \eta_i + 2$;

$$|\bar{V}_i^{\xi_i} - \bar{V}_i| \leq A_i(e^t - e^{t^{\xi_i}})\ \text{ et }\ |\bar{W}_i^{\xi_i} - \bar{W}_i| \leq B_i(e^t - e^{t^{\xi_i}}),$$

D'où

$Z_1 \leq A_i\,(w_i^{\xi_i})^{N-1}\,(e^t - e^{t^{\xi_i}})$ et $Z_2 \leq B_i\,((w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)}\,(e^t - e^{t^{\xi_i}}) + c\,(w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)} \times (e^{t^{\xi_i}} - e^t)$.

Ainsi,

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq (w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)}[(A_i\,{w_i^{\xi_i}}^{2/(n-2)} + B_i)\,(e^t - e^{t^{\xi_i}}) + c\,(e^{t^{\xi_i}} - e^t)].$$

Puisque $w_i^{\xi_i} \leq \bar{c}$, on obtient:

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq (w_i^{\xi_i})^{n/(n-2)}[(A_i \bar{c}^{2/(n-2)} + B_i)\,(e^t - e^{t^{\xi_i}}) + c\,(e^{t^{\xi_i}} - e^t)].\ \ (1)$$

Déterminons le signe de $\bar{Z} = [(A_i \bar{c}^{2/(n-2)} + B_i)\,(e^t - e^{t^{\xi_i}}) + c\,(e^{t^{\xi_i}} - e^t)]$.

L'inégalité (1) devient alors :

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq (w_i^{\xi_i})^\alpha[-c + A_i\,\bar{c}^{2/(n-2)} + B_i](e^t - e^{t^{\xi_i}}).$$

On sait que $A_i \to 0$ et $B_i \to 0$. Pour $t_0 < 0$, assez petit, la quantité $c - A_i\, \bar{c}^{2/(n-2)} - B_i$ devient positive et le résultat cherché est obtenu dans l'intervalle $[\xi_i, t_0]$.

Le fait de prendre l'intervalle $[\xi_i, t_0]$ au lieu de $[\xi_i, \log 2]$, n'est pas gênant, au contraire, plus l'intervalle est petit plus l'infimum est grand. La suite de la démonstration est identique á celle de la fin du Théorème 1.

On pourrait croire que t_0 dépend de ξ_i ou de $w_i^{\xi_i}$, mais t_0 dépend seulement de $\bar{c}$, une constante qui ne dépend que de n, a et b.

On calcule t_0 puis on introduit $\xi_i \leq \log \eta_i + 2$ comme dans les autres théorèmes, et on vérifie l'inégalité $L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq 0$, dès que $w_i^{\xi_i} - w_i \leq 0$ sur $[\xi_i, t_0]$.

Ayant déterminé $t_0 < 0$ tel que $c - A_i\, \bar{c}^{N-1-\alpha} - B_i$ soit positive, on pose:

$\xi_i = \sup\{\mu_i \leq \log \eta_i + 2, w_i^{\mu_i}(t,\theta) - w_i(t,\theta) \leq 0, \forall\,(t,\theta) \in [\mu_i, t_0] \times \mathbb{S}_{n-1}\}$.

Par définition de ξ_i, $w_i^{\xi_i} - w_i \leq 0$. Ensuite, on vérifie que $-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq 0$.

Comme dans le Théorème 1 dans [B], le principe du maximum, entraîne:

$$\min_{\theta \in \mathbb{S}_{n-1}} w_i(t_0, \theta) \leq \max_{\theta \in \mathbb{S}_{n-1}} w_i(2\xi_i - t_0)\,.$$

Or,

$$w_i(t_0, \theta) = e^{t_0} u_i(a_i + e^{t_0}\theta) \geq e^{t_0} \min u_i \text{ et } w_i(2\xi_i - t_0) \leq \frac{c_0}{u_i(a_i)},$$

donc:

$$u_i(a_i) \times \min u_i \leq c.$$

Ce qui contredit la proposition.

<u>Preuve du Théorème 2</u>

Les étapes sont identiques à celles de la preuve du théorème 1. Il y a quelques modifications dans la partie " Coordonnées polaires et méthode moving-plane". La proposition de la preuve du théorème 1 se conserve. Notons que la technique blow-up se simplifie car u_i est décroissante et son maximum est atteint en 0.

<u>Coordonnées polaires</u> *(Méthode "Moving-plane")*

Posons pour $t \in]-\infty, \log 2]$ et $\theta \in \mathbb{S}_{n-1}$:

$w_i(t,\theta) = e^{(n-2)t/2} u_i(e^t),\ \bar{V}_i(t,\theta) = V_i(e^t)\ \text{ et }\ \bar{W}_i(t,\theta) = W_i(e^t).$

Par ailleurs, soit L l'opérateur $L = \partial_{tt} - \dfrac{(n-2)^2}{4}$.

La fonction w_i est solution de l'équation suivante :

$$-Lw_i = \bar{V}_i {w_i}^{N-1} + e^{2t} \bar{W}_i w_i.$$

On pose pour $\lambda \leq 0$:

$t^\lambda = 2\lambda - t$, $w_i^\lambda(t,\theta) = w_i(t^\lambda)$, $\bar{V}_i^\lambda(t,\theta) = \bar{V}_i(t^\lambda)$ et $\bar{W}_i^\lambda(t,\theta) = \bar{W}_i(t^\lambda)$.

Alors, pour pouvoir vérifier si le Lemme 2 du Théorème 1 dans [B] reste valable, il suffit de noter que la quantité $-L(w_i^\lambda - w_i)$ est négative lorsque $w_i^\lambda - w_i$ l'est. En fait, pour chaque indice i, $\lambda = \xi_i \leq \log \eta_i + 2$, ($\eta_i = [u_i(y_i)]^{(-2)/(n-2)}$).

Tout d'abord:

$$w_i(2\xi_i - t) = w_i[(\xi_i - t + \xi_i - \log \eta_i - 2) + (\log \eta_i + 2)],$$

par définition de w_i et pour $\xi_i \leq t$:

$$w_i(2\xi_i - t) = e^{[(n-2)(\xi_i - t + \xi_i - \log \eta_i - 2)]/2} e^{n-2} v_i[e^2 e^{(\xi_i - t) + (\xi_i - \log \eta_i - 2)}] \leq 2^{(n-2)/2} e^{n-2} = \bar{c}.$$

On sait que

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) = [\bar{V}_i^{\xi_i}(w_i^{\xi_i})^{N-1} - \bar{V}_i {w_i}^{N-1}] + [e^{2t^{\xi_i}} \bar{W}_i^{\xi_i}(w_i^{\xi_i}) - e^{2t} \bar{W}_i w_i],$$

Les deux termes du second membre, notés Z_1 et Z_2, peuvent s'écrire:

$$Z_1 = (\bar{V}_i^{\xi_i} - \bar{V}_i)(w_i^{\xi_i})^{N-1} + \bar{V}_i[(w_i^{\xi_i})^{N-1} - {w_i}^{N-1}],$$

et

$$Z_2 = [(e^{2t}\bar{W}_i)^{\xi_i} - (e^{2t}\bar{W}_i)] w_i^{\xi_i} + e^{2t}\bar{W}_i(w_i^{\xi_i} - w_i).$$

D'autre part, comme dans la démonstration du Théorème 2 dans [B]:

$${w_i}^{\xi_i} \leq w_i \text{ et } w_i^{\xi_i}(t, \theta) \leq \bar{c} \text{ pour tout } (t, \theta) \in [\xi_i, \log 2] \times \mathbb{S}_{n-1},$$

où $\bar{c}$ est une constante positive indépendante de i de $w_i^{\xi_i}$ pour $\xi_i \leq \log \eta_i + 2$;

$$|\bar{V}_i^{\xi_i} - \bar{V}_i| \leq A_i(e^{2t} - e^{2t^{\xi_i}}) \text{ et } |(e^{2t}\bar{W}_i)^{\xi_i} - (e^{2t}\bar{W}_i) - W_i(0)(e^{2t^{\xi_i}} - e^{2t})| \leq \tilde{B}_i(e^{2t} - e^{2t^{\xi_i}}),$$

avec, $\tilde{B}_i \to 0$. D'où

$$Z_1 \leq A_i \, (w_i^{\xi_i})^{N-1} \, (e^{2t} - e^{2t^{\xi_i}}) \text{ et } Z_2 \leq \tilde{B}_i \, (w_i^{\xi_i}) \, (e^{2t} - e^{2t^{\xi_i}}) + c \, (w_i^{\xi_i}) \times (e^{2t^{\xi_i}} - e^{2t}).$$

Ainsi,

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq w_i^{\xi_i} [[A_i \, (w_i^{\xi_i})^{4/(n-2)} + \tilde{B}_i] \, (e^{2t} - e^{2t^{\xi_i}}) + c \, (e^{2t^{\xi_i}} - e^{2t})].$$

Puisque $w_i^{\xi_i} \leq \bar{c}$, on obtient:

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq w_i^{\xi_i} [(A_i \bar{c}^{4/(n-2)} + \tilde{B}_i) \, (e^{2t} - e^{2t^{\xi_i}}) + c \, (e^{2t^{\xi_i}} - e^{2t})]. \quad (1)$$

Déterminons le signe de $\bar{Z} = [(A_i \bar{c}^{4/(n-2)} + \tilde{B}_i) \, (e^{2t} - e^{2t^{\xi_i}}) + c \, (e^{2t^{\xi_i}} - e^{2t})]$.

L'inégalité (1) devient alors :

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq w_i^{\xi_i} [-c + A_i \, \bar{c}^{4/(n-2)} + \tilde{B}_i](e^{2t} - e^{2t^{\xi_i}}).$$

On sait que $A_i \to 0$ et $\tilde{B}_i \to 0$. Pour $t_0 < 0$, assez petit, la quantité $c - A_i \, \bar{c}^{4/(n-2)} - \tilde{B}_i$ devient positive et le résultat cherché est obtenu dans l'intervalle $[\xi_i, t_0]$.

Le fait de prendre l'intervalle $[\xi_i, t_0]$ au lieu de $[\xi_i, \log 2]$, n'est pas gênant, au contraire, plus l'intervalle est petit plus l'infimum est grand. La suite de la démonstration est identique á celle de la fin du Théorème 1.

On pourrait croire que t_0 dépend de ξ_i ou de $w_i^{\xi_i}$, mais t_0 dépend seulement de $\bar{c}$, une constante qui ne dépend que de n, a et b.

On calcule t_0 puis on introduit $\xi_i \leq \log \eta_i + 2$ comme dans les autres théorèmes, et on vérifie l'inégalité $L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq 0$, dès que $w_i^{\xi_i} - w_i \leq 0$ sur $[\xi_i, t_0]$.

Ayant déterminé $t_0 < 0$ tel que $c - A_i \, \bar{c}^{4/(n-2)} - \tilde{B}_i$ soit positive, on pose:

$$\xi_i = \sup\{\mu_i \leq \log \eta_i + 2, w_i^{\mu_i}(t) - w_i(t) \leq 0, \forall \, t \in [\mu_i, t_0]\}.$$

Par définition de ξ_i, $w_i^{\xi_i} - w_i \leq 0$. Ensuite, on vérifie que $-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq 0$.

Comme dans le Théorème 1 dans [B], le principe du maximum, entraîne:

$$w_i(t_0) \leq w_i(2\xi_i - t_0),$$

comme u_i est décroissante, on obtient:

$$u_i(a_i) \times u_i(1) \leq c.$$

Références:

[A] T. Aubin. Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag 1998.

[B] S.S Bahoura. Majorations du type $\sup u \times \inf u \leq c$ pour l'équation de la courbure scalaire prescrite sur un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. J.Math.Pures Appl.(9) 83 (2004), no.9, 1109-1150.

[C-G-S] Caffarelli L, Gidas B., Spruck J. Asymptotic symmetry and local behavior of semi-linear elliptic equations with critical Sobolev growth. Commun. Pure Appl. Math. 37 (1984) 369-402.

[C-L 1] C.C. Chen, C-S. Lin. Prescribing scalar curvature on $\mathbb{S}_n$. I. A priori estimates. J. Differential Geom. 57 (2001), no. 1, 67–171.

[C-L 2] Chen C-C. and Lin C-S. Blowing up with infinite energy of conformal metrics on $\mathbb{S}_n$. Comm. Partial Differ Equations. 24 (5,6) (1999) 785-799.

[G-N-N] B. Gidas, W. Ni, L. Nirenberg, Symmetry and Related Propreties via the Maximum Principle, Comm. Math. Phys., vol 68, 1979, pp. 209-243.

[L1] Y.Y Li. Prescribing Scalar Curvature on $\mathbb{S}_n$ and related Problems. I. J. Differential Equations 120 (1995), no. 2, 319-410.

[L2] Y.Y Li. Prescribing Scalar Curvature on $\mathbb{S}_n$ and related Problems. II. Comm. Pure. Appl. Math. 49(1996), no.6, 541-597.

6, RUE FERDINAND FLOCON, 75018 PARIS, FRANCE.

E-mail address: samybahoura@yahoo.fr, bahoura@ccr.jussieu.fr